BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a X-a

1. Fie z_1 şi z_2 două numere complexe. Arătaţi că: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

Barem:

$z\cdot\overline{z}=|z|^2, \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$	2p
$\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)=$ $=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_1}-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=$ $=2\left(z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}\right)=2\left(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2\right)$	5 p

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_{14}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)=\log_{64}x$.

Barem:

Notăm $\sqrt[6]{x}=t, x>0, t>0$ şi ecuaţia devine	1 p
$\log_{14}\left(t^3+t^2+t\right)=\log_{2^6}t^6$	1 p
$\log_{14}\left(t^3+t^2+t\right)=\log_2 t$	1 p
$t^3+t^2+t=14^{\log_2 t}$	1 p
$t\left(t^2+t+1\right)=t^{\log_2 14}$ şi $t\left(t^2+t+1\right)=t^{1+\log_2 7}$	1 p
$t^2+t+1=t^{1\log_2 7}\Big\vert:t^2\Rightarrow 1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=t^{\log_2\frac{7}{4}}$, $1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$ este funcţie strict descrescătoare $t^{\log_2\frac{7}{4}}$ este funcţie strict crescătoare $\Rightarrow t=2$ este soluţie unică $\Rightarrow x=2^6$.	2 p

3. Să se cerceteze dacă funcţia $f:N^*\to R, f(n)=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\right\}$ este injectivă.

Barem:

Fie $\forall m,n\in N^*$ astfel încât $f(n)=f(m)$ şi cercetăm dacă rezultă dacă $m=n$.	2 p
Fie $\forall m,n\in N^*$ $f(n)=f(m)\Rightarrow\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{m}\right\}$ 1. dacă $m=n\Rightarrow f$ injectivă	1 p
2. dacă n este mai mic ca m şi $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{m}\right\}\Rightarrow$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}\right]=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{m}-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{m}\right]\Rightarrow$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{m}=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{m}\right]\in Z\Rightarrow$ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{m}\in Z$	2 p
Descompunând în factori numerele $n+1,n+2,\ldots m$ atunci toate numerele sunt de forma $2^t\cdot(2k+1), t,k\in N$. Fie $r\in\{n+1,n+2,\ldots m\}$ astfel încât $r=2^k\cdot a, k\in N, a$ impar, k cea mai mare putere a lui 2 din descompunerea numerelor $n+1,n+2,\ldots m$. Cum nici un număr din cele rămase nu va mai conţine pe 2^k se arată că $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{m}\notin Z$, contradictie, deci n nu poate fi mai mare ca m. . Analog pentru m mai mic ca n, si rezulta f injectivă.	2 p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.